

多边形序列的最短路径算法

李发捷,¹ KLETTE Reinhard²

(1. 格罗宁根大学, 数学与计算科学学院, 格罗宁根, 荷兰, 9700; 2. 奥克兰大学, 计算机系, 新西兰, 奥克兰, 1142)

摘要 给定平面上一个含 k 个简单多边形的序列, 及一个起点 p , 一个终点 q . 我们近似地计算一条最短路径使得它开始于 p 点, 然后按指定的次序访问每个多边形, 最后终止于 q 点. 如果多边形是两两不相交的和非凸的, 那么这问题至今还没有算法解. 应用一种R算法, 我们给出复杂性为 $\kappa(\varepsilon) \cdot \mathcal{O}(n)$ 的一种近似算法, 这里 n 是给定多边形的顶点总数, 函数 $\kappa(\varepsilon)$ 定义为 $\kappa(\varepsilon) = (L_0 - L)/\varepsilon$, 其中 L_0 是初始路径长度, L 是最优路径长度, ε 是计算精确度. 给定的R算法稍作修改也能用来近似地解决三个NP完全或NP困难的三维欧几里德最短路径问题(ESP). 它们的复杂性均为 $\kappa(\varepsilon) \cdot \mathcal{O}(k)$, 这里 k 是含有所给定的障碍物的堆的层数.

关键词 R算法; 最短路径; 旅游多边形; 部件切割; q 矩形

中图分类号: TP202+.7

Shortest Path Algorithms for Sequences of Polygons

LI Fajie,¹ KLETTE Reinhard²

(1. Institute for Mathematics and Computing Science, University of Groningen
P.O. Box 800, 9700 AV Groningen, The Netherlands;

2. Computer Science Department, The University of Auckland Private Bag 92019, Auckland 1142, New Zealand)

Abstract Given a sequence of k simple polygons in a plane, and a start point p , a target point q . We approximately compute a shortest path that starts at p , then visits each of the polygons in the specified order, and finally ends at q . So far no solution was known if the polygons are disjoint and non-convex. By applying a rubberband algorithm, we give an approximative algorithm with time complexity in $\kappa(\varepsilon) \cdot \mathcal{O}(n)$, where n is the total number of vertices of the given polygons, and function $\kappa(\varepsilon)$ is as

$$\kappa(\varepsilon) = (L_0 - L)/\varepsilon$$

where L_0 is the length of the initial path, and L is the true (i.e., optimum) path length. The given rubberband algorithm can also be applied to solve approximately three NP-complete or NP-hard 3D Euclidean shortest path (ESP) problems in time $\kappa(\varepsilon) \cdot \mathcal{O}(k)$, where k is the number of layers in a stack which contains the defined obstacles.

Key words rubberband algorithm, shortest paths, touring polygons, parts cutting, q -rectangles

1 引言

本文报告R算法的一些应用. R算法最初由[1]所提出, 然后[12]加以详细研究. 在详细说明R算法之前, 我们首先描述两个紧密相关的问题, 旅游多边形问题和部件切割问题, 本文将给出它们的近似解. 本文第二段介绍R算法的基本原理和一些应用时应当注意的

问题. 第三段举例说明它关于旅游多边形问题和 q 矩形问题上的应用. 第四段结束全文.

1.1 旅游多边形问题

我们回忆[4]所引入的一些概念和符号. 该篇文章首次提出旅游多边形问题. 假设 π 是一个平面. 它可以表示成为 \mathbb{R}^2 . 考虑多边形 $P_i \subset \pi$, 这里 $i = 1, 2, \dots, k$,

及两点 $p, q \in \pi$. 假设 $p_0 = p$ 及 $p_{k+1} = q$. 假设 $p_i \in \mathbb{R}^2$, 此处 $i = 1, 2, \dots, k$. 假定 $\rho(p, p_1, p_2, \dots, p_k, q)$ 表示路径 $pp_1p_2 \dots p_kq \subset \mathbb{R}^2$. 假如不会引起混淆, 让 $\rho(p, q)$ 表示路径 $\rho(p, p_1, p_2, \dots, p_k, q)$. 如果 $p_i \in P_i$ 满足 p_i 是 $\partial P_i \cap \rho(p, p_i)$ 上的沿着路径第一点 (∂P_i 表示 P_i 的边界, 以下同), 那么我们说路径 $\rho(p, q)$ 访问 P_i 于 p_i 点, 此处 $i = 1, 2, \dots, k$.

无约束 TPP 问题定义如下:

在平面上如何寻找出一条欧几里德最短路径 $\rho(p, p_1, p_2, \dots, p_k, q)$ 使得它按给定次序 ($i = 1, 2, \dots, k$) 访问每个多边形 P_i ?

假定对于任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\partial P_i \cap \partial P_j = \emptyset$, 而且每个 P_i 是凸的. [4] 讨论这类特别情形并且给出复杂性为 $\mathcal{O}(kn \log(n/k))$ 的算法解. 这里 n 是平面 π 上所有多边形 P_i 的顶点总数, $i = 1, 2, \dots, k$.

根据他们的结果, [4] 指出, “一个最引起兴趣的公开的问题是确定两两不相交的非凸的简单多边形的 TPP 的复杂性”.

本文 3.1 段的算法 2 针对这个问题给出一个复杂性为 $\kappa(\varepsilon) \cdot \mathcal{O}(n)$ 的一种近似算法, 这里 n 是给定所有多边形的顶点总数, ε 是精确度.

1.2 部件切割问题

在各种各样的加工工业上, 例如, 制衣, 制窗, 或机械加工等等, 常常需要从大片的纸, 布料, 玻璃, 金属, 等等上面切割出很多的部件 (假如以简单多边形为模型). 受到这些应用的启发, [9] 提出以下三种切割模式:

1. 连续切割问题: 切割工具访问每个对象 (例如, 简单多边形) 正好一次. 切割刀具可以从对象的边缘上任何一点开始, 但在移动到下一对象前必须切割完整个对象. 因此, 那个对象的进入点和离开点必须是同一点.)

2. 端点切割问题: 进入和退出每个对象的某个预先规定的边沿点. 但可以切割每个对象成几个部分. 也就是说, 它可以重复地访问同一个对象.

3. 间歇切割问题: 这是最一般的情形. 每个对象可以被切割成几个部分而且进入和离开点没有受到限制.

[9] 集中考虑每个对象都是一个简单多边形的连续切割问题. 他们称这个问题为模板切割旅行售货员问题 (P-TSP). 它是著名的旅行售货员问题 (TSP) 的推广 [11].

P-TSP 可进一步推广到广义的 TSP (GTSP) [10],

14]. 如果每个多边形都退化成为一个单一的顶点, 那么 P-TSP 就变成 TSP. TSP 是已知 NP 困难的 [5]. 由此可知 P-TSP 也是 NP 困难的.

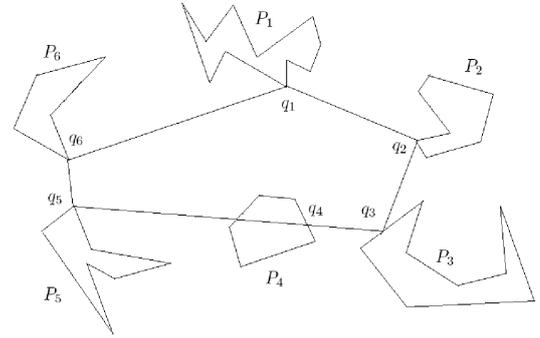


图 1 说明 [9] 中简化的 P-TSP. 假定这里多边形按照给定次序访问.

Fig. 1 Illustration for the simplified P-TSP in [9] where polygons are assumed to be given in a particular order.

P-TSP 的困难使得 [9] 添加上一个条件来考虑这个问题: 假定所有多边形都按一个给定的次序访问 (参见插图 1). [9] 于是基于一种拉格朗日放松方法 (参见 [6, 8]) 进而按启发式方法解决这个简化了的 P-TSP. 但它没有给出这个方法的复杂性分析的证明. 作为 [9] 的工作的后续工作, [3] 证明一个更进一步简化了的 P-TSP (即, [3] 只考虑凸多边形而且这些多边形按照给定次序访问) 是多项式时间可解的 (参见插图 2). 如果再加上一个条件: 起点是给定的 (参见插图 3),

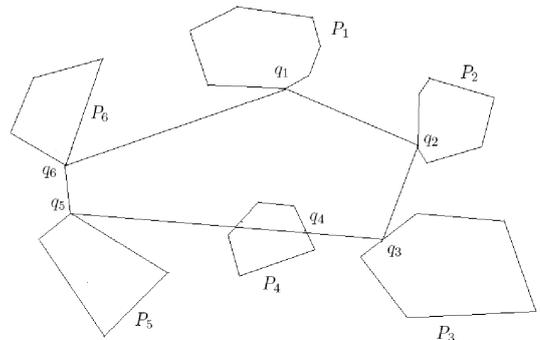


图 2 说明 [3] 中进一步简化的 P-TSP. 假定这里多边形全是凸的.

Fig. 2 Illustration for the further simplified P-TSP in [3] also assuming convex polygons.

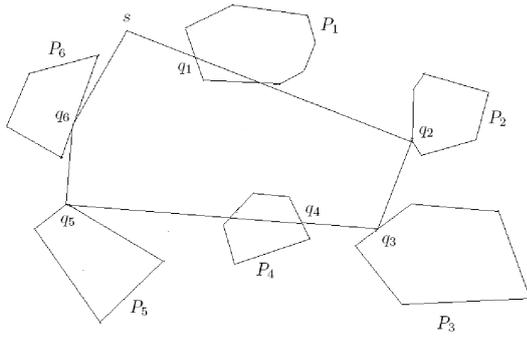


图 3 说明[4]中的P-TSP. 假定这里给定起点s.

Fig. 3 Illustration for the P-TSP as considered in [4], now also with a given start point s.

那么[4]称他们能解决这个问题. 他们的算法的复杂性是 $O(kn \log(n/k))$, 这里n是平面上所有多边形的顶点总数, $\partial P_i \subset \pi, i = 1, 2, \dots, k$.

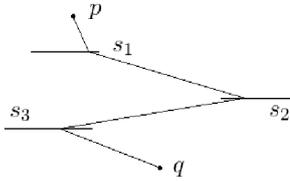


图 4 TSP的退化情形. $k = 3$.

Fig. 4 Degenerate case of the TPP, for $k = 3$.

2 R 算法

我们利用以下一个非常简单的二维例子来说明R算法的基本思想:

考虑无约束TPP的一个退化情形: 每个多边形都收缩成为一个单一的直线段(参见插图4). 以下的算法是R算法的简化了的版本(“弧版本”). 它可以说明原始的R算法的基本原理.

算法 1

1. Let $\varepsilon = 10^{-10}$ (选定精确度).
2. 计算初始路径 $\rho = \langle p, p_1, p_2, \dots, p_k, q \rangle$ 的长度 l_1 .
3. Let $q_1 = p$ 和 $i = 1$
4. while $i < k - 1$ do
 - 4.1 Let $q_3 = p_{i+1}$
 - 4.2 计算一个点 $q_2 \in s_i$ 使得 $d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q') + d_e(q_3, q') : q' \in s_i\}$. ($d_e(q_1, q_2)$ 表示两点 q_1, q_2 间的欧几里德距离)
 - 4.3 更换 p_i 为 q_2 以更新路径 ρ .
 - 4.4 Let $q_1 = p_i$ 和 $i = i + 1$
- 5.1 Let $q_3 = q$

5.2 计算一个点 $q_2 \in s_k$ 使得

$$d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in s_k\}.$$

5.3 更换 p_k 为 q_2 以更新路径 ρ .

6. 计算更新路径 $\rho = \langle p, p_1, p_2, \dots, p_k, q \rangle$ 的长度 l_2 .

7. Let $\delta = l_1 - l_2$

8. 如果 $\delta > \varepsilon$, 那么让 $l_1 = l_2$ 而且 goto 到第三步.

否则, 停止.

第一步的精确度参数 ε 可以选定给定计算机所能保证的最大可能的数量精确度.

在本文的其余的部分, 我们称

$$\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$$

为R算法的**脚步集**, 而每个 s_i 是R算法的一个**脚步元素**.

在一个脚步集中可能出现两个脚步元素具有相同的端点的情形. 例如, 假设算法1的输入为下列的数据:

$$s_1 = q_1q_2, s_2 = q_2q_3, q_1 = (0,0), q_2 = (2,4), q_3 = (3,0), p = (1,0), \text{ 及 } q = (2,0) \text{ (参见图5)}.$$

作为初始, 假设 p_1 和 p_2 分别是 s_1 和 s_2 的中点. 也就是说, $p_1 = (1,2)$ 和 $p_2 = (2.5,2)$. 这样我们得到初始多边线路(即, 包含于多边形边界的一条路径) $\rho = \langle p, p_1, p_2, q \rangle$ 的长是 5.5616. 算法1找到近似的最短路径是 $\rho = \langle p, p'_1, p'_2, q \rangle$, $p'_1 = (0.3646, 0.7291)$, $p'_2 = (2.8636, 0.5455)$, 它的长是 4.4944(参见表格1, 说明的重复数 I 和结果 δs).

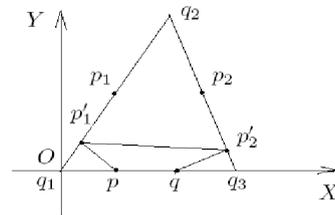


图 5 说明两个脚步元素可能含有相同的端点.

Fig. 5 Illustration for identical endpoints of steps.

I	δ
1	-0.8900
2	-0.1752
3	-0.0019
4	-1.2935e-005
5	-8.4435e-008
6	-5.4930e-010
7	-3.5740e-012

表 1 初始由插图5说明的重复数 I 和结果 δs [即, $p_1 = (1, 2)$ 和 $p_2 = (2.5, 2)$ 作为初始点].

Table 1 Number I of iterations and resulting δs for the initialization illustrated by Figure 5 [i.e., with $p_1 = (1, 2)$ and $p_2 = (2.5, 2)$ as initialization points].

现在我们假定一个不同的初始点的输入, 使得 $p_1 = p_2 = q_2$. 在这种情形下, 算法1的4.2步的输出将是错误的: 所计算的路径 $\rho = \langle p, p'_1, p'_2, q \rangle$, $p'_1 = q_2$ 和 $p'_2 = q_2$. 它的长是8.1231. (查阅[12]的引理16, 我们看到在这个例子里, p_1 不等于 p_0 和 p_2)

我们称这个初始例子的情形为应用R算法时出现的一条退化路径. 它可能出现在算法的初始化或算法的后面的重复迭代中间. 一般地说, 它是定义成为初始的或更新的多边线路出现至少两个线段含有一个相同的顶点. 这样的退化情形造成算法1的4.2步失效.

每一条退化路可以近似地处理如下: 我们可以不允许 $p_2 = q_2$. 为此, 我们从线段 s_1 和 s_2 中切除掉一段充分小的线段. 以下的例子说明对于假定的输入数据如何处理这样的退化情形.

我们修改 x_1, x_2, y_1, y_2 的初始值为:

$$\delta' = 2.221 \times 10^{-16} \text{ (理由参见下面)}$$

$$x_1 = 2 - \delta' \text{ 和 } y_1 = 2 \times x_1$$

$$x_2 = 2 + \delta' \text{ 和 } y_2 = -4 \times (x_2 - 3)$$

$$p_1 = (x_1, y_1) \text{ 和 } p_2 = (x_2, y_2)$$

此外, 假设精确度改为

$$\varepsilon = 1 \times 10^{-100}$$

初始的多边线路 $\rho = \langle p, p_1, p_2, q \rangle$ 的长等于8.1231. 算法1可计算出最短路径 $\rho = \langle p, p'_1, p'_2, q \rangle$, $p'_1 = (0.3646, 0.7291)$, $p'_2 = (2.8636, 0.5455)$. 它的长等于4.4944(说明的重复数 I 和结果 δs , 参见表格2).

当然, 如果我们让精确度等于

$$\varepsilon = 1 \times 10^{-10}$$

那么算法将要在较少重复以后更快地终止. 我们是在一台奔腾4个人电脑上使用Matlab7.04完成算法实现的. 如果我们改变 δ' 的值为

$$\delta' = 2.22 \times 10^{-16}$$

那么我们得到与初始点 $p_1 = p_2 = q_2$ 同样的错误结果. 这是因为计算机不能识别 x_1 和 $x_1 \pm 2.22 \times 10^{-16}$ 之间的差别. 然而, 对于实际应用, 数值

$$\delta' = 2.221 \times 10^{-16}$$

在这种特别的算法实现环境下, 应当是足够小或者说足够精确了.

3 一些应用

我们利用R算法的特别的版本(变形)来近似地解决两个计算问题.

3.1 旅游多边形问题

本文这一段的主要算法给出本文1.1段提到的公开问题的近似算法解. 它是从稍微修改算法1而获得. (两个算法的差别仅在于4.2步和5.2步).

算法 2

1. Let $\varepsilon = 10^{-10}$ (选定精确度).

2. 计算初始路径 $\rho = \langle p, p_1, p_2, \dots, p_k, q \rangle$ 的长度 l_1 .

3. Let $q_1 = p$ 和 $i = 1$

4. while $i < k - 1$ do

4.1 Let $q_3 = p_{i+1}$

4.2 计算一个点 $q_2 \in \partial P_i$ (参见[12]中引理53的证明)使得

$$d_e(q_1, q_2) +$$

$$d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in \partial P_i\}.$$

(其中 ∂P_i 是多边形 P_i 的边界.)

4.3 更换 p_i 为 q_2 以更新路径 ρ .

4.4 Let $q_1 = p_i$ 和 $i = i + 1$

5.1 Let $q_3 = q$

5.2 计算一个点 $q_2 \in \partial P_k$ 使得

$$d_e(q_1, q_2) +$$

$$d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in \partial P_k\}.$$

5.3 更换 p_k 为 q_2 以更新路径 ρ .

6. 计算更新路径 $\rho = \langle p, p_1, p_2, \dots, p_k, q \rangle$ 的长度 l_2 .

7. Let $\delta = l_1 - l_2$

8. 如果 $\delta > \varepsilon$, 那么让 $l_1 = l_2$ 而且goto到第三步. 否则, 停止.

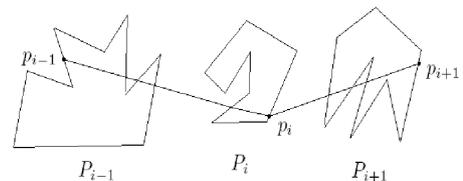


图 6 说明算法2的4.2步和5.2步的初始化.

Fig. 6 Illustration for the initialization for Steps 4.2 and 5.2 in Algorithm 2.

I	δ	I	δ	I	δ	I	δ
1	-5.4831e-007	7	-1.2313	13	-7.0319e-010	19	8.8818e-016
2	-6.2779e-006	8	-2.0286	14	-4.5732e-012	20	8.8818e-016
3	-7.7817e-005	9	-0.2104	15	-3.0198e-014	21	-8.8818e-016
4	-9.6471e-004	10	-0.0024	16	-8.8818e-016	22	8.8818e-016
5	-0.0119	11	-1.6550e-005	17	8.8818e-016	23	-8.8818e-016
6	-0.1430	12	-1.0809e-007	18	-8.8818e-016	24	0

表 2 初始由插图5说明的重复数 I 和结果 δs [即, $p_1 = (2 - \delta', 2(2 - \delta'))$ 和 $p_2 = (2 + \delta', -4((2 + \delta') - 3))$ 作为初始点, $\delta' = 2.221e-16$].

Table 2 Number I of iterations and resulting δs , for the step set shown in Figure 5, with $p_1 = (2 - \delta', 2(2 - \delta'))$ and $p_2 = (2 + \delta', -4((2 + \delta') - 3))$ as initialization points and $\delta' = 2.221e-16$.

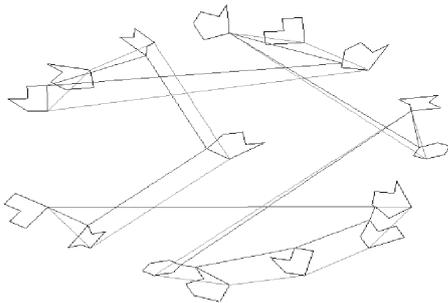


图 7 算法2的输入例子.

Fig. 7 Input example for Algorithm 2.

算法2的输入例子参见插图7. 插图8显示一些测量的时间用以说明算法的时间复杂性(正确性和时间复杂性的证明参见[12]). 解旅游问题, 动物园看护人问题, 约束TPP问题, 和看守人路线问题的算法都可以由修改算法2而获得(参见[12] 的十一章).

以下的子程序用以处理退化路出现的情形. 当我们应用算法3(它是算法2的一个变形)于无约束TPP时, 因为所有的多边形未必都是两两不相交的, 我们有必要处理这样情况.

子程序 1

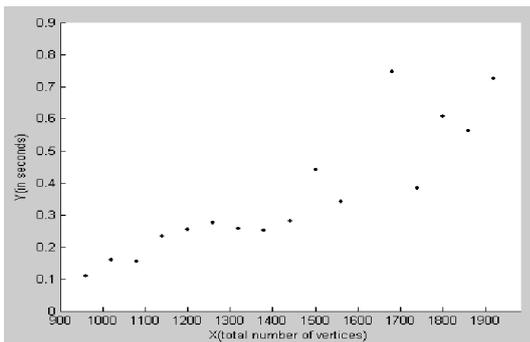


图 8 算法2的运行时间.

Fig. 8 Measured run times for Algorithm 2.

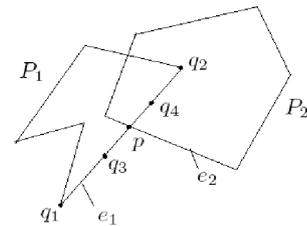


图 9 说明子程序1.

Fig. 9 Illustration for Procedure 1.

输入: 一点 p 和两个多边形 P_1 和 P_2 使得 $p_2 \in \partial P_1 \cap \partial P_2$ (参见插图9).

输出: 一点 $q \in \partial P_1$ 使得 $d_e(q, p) \leq \varepsilon$ 而且 $q \notin \partial P_2$.

1. Let $\varepsilon = 10^{-10}$ (选定精确度).
2. 寻找一点 $e_j \in E(P_j)$ 使得 $p \in e_1 \cap e_2$, 此处 $j = 1, 2$.
3. Let $e_1 = q_1q_2$. 假设 q_3 和 q_4 分别是线段 q_1p 和 q_2p 上的两点(参见插图9) 使得 $d_e(q_j, p) \leq \varepsilon$ 而且 $q_j \notin \partial P_2$, 此处 $j = 1, 2$.
4. Let $q = \min\{q_3, q_4\}$ (点的坐标按字典排列次序比较大小).
5. 输出 q .

如果存在 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ 使得 $i \neq j, \partial P_i \cap \partial P_{i+1} \neq \emptyset$, 那么我们修改算法2如下: 假设 $p_0 = p, p_{k+1} = q, P_0 = p$, 而且 $P_{k+1} = q$ (算法2与算法3的差别仅在于4.1a步和5.1a步). 假设 $P = \{p, p_1, p_2, \dots, p_k, q\}$.

算法 3

1. Let $\varepsilon = 10^{-10}$ (选定精确度).
2. 计算初始路径 $\rho = \langle p, p_1, p_2, \dots, p_k, q \rangle$ 的长度 l_1 .
3. Let $q_1 = p$ 和 $i = 1$
4. while $i < k - 1$ do
 - 4.1a. 如果 $(p_i = p_{i-1}$ 且 $p_i \neq p_{i+1})$ 或 $(p_i \neq p_{i-1}$

且 $p_i = p_{i+1}$ 或 $(p_i = p_{i-1}$ 且 $p_i = p_{i+1})$, 那么应用子程序1计算一点 p_i 使得 $p_i \neq p_{i-1}$ 且 $p_i \neq p_{i+1}$.

4.1 Let $q_3 = p_{i+1}$

4.2 计算一个点 $q_2 \in \partial P_i$ (参见[12]中引理53的证明)使得

$$d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q') + d_e(q_3, q') : q' \in \partial P_i\}.$$

(其中 ∂P_i 是多边形 P_i 的边界.)

4.3 更换 p_i 为 q_2 以更新路径 ρ .

4.4 Let $q_1 = p_i$ 和 $i = i + 1$

5.1a. 如果 $(p_k = p_{k-1}$ 且 $p_k \neq p_{k+1})$ 或 $(p_k \neq p_{k-1}$ 且 $p_k = p_{k+1})$ 或 $(p_k = p_{k-1}$ 且 $p_k = p_{k+1})$, 那么应用子程序1计算一点 p_k 使得 $p_k \neq p_{k-1}$ 且 $p_k \neq p_{k+1}$.

5.1 Let $q_3 = q$

5.2 计算一个点 $q_2 \in \partial P_k$ 使得

$$d_e(q_1, q_2) + d_e(q_3, q_2) = \min\{d_e(q_1, q) + d_e(q_3, q) : q \in \partial P_k\}.$$

5.3 更换 p_k 为 q_2 以更新路径 ρ .

6. 计算更新路径 $\rho = \langle p, p_1, p_2, \dots, p_k, q \rangle$ 的长度 l_2 .

7. Let $\delta = l_1 - l_2$

8. 如果 $\delta > \varepsilon$, 那么让 $l_1 = l_2$ 而且goto到第三步.

否则, 停止.

[12]的11.5段应用这个算法证明在所有简单多边形是未必两两不相交和非凸的情形下, TPP可以有复杂性为多项式时间的近似算法解:

定理 1 ([12], 定理37) 无约束TPP存在复杂性为 $\kappa(\varepsilon) \cdot \mathcal{O}(n)$ 的一种近似算法, 这里 n 是给定多边形的顶点总数.

根据以下定理, 寻找这个问题的精确解是NP困难的:

定理 2 ([4], 定理6) 对于任何Minkowski距离 $L_p (p \geq 1)$, 如果多边形 P_i 是非凸的, 且它们的边与 x 轴成 $0, 45$ 或 90 度角, 那么旅游多边形问题(TPP)是NP困难的.

3.2 q 矩形

对于放置于笛卡尔直角坐标系 xyz 中的三维欧几里德空间中一个简单多面体(即, 一个同胚于一个单位球的紧的多面体区域), 我们表示为 Π . 假设 Π 的边集是 E ; 顶点集是 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

对于 $p \in \Pi$, 假设 π_p 是经过 p 而且平行于 xoy 面的平面 $\pi_p \cap \Pi$ 是有限个简单多边形组成的集合. 单个点看作是一个退化多边形. 假设 P 是一个由 p 和 π 决定的这类简单多边形.

任何简单多边形 P , 是 $\pi_p \cap \Pi$ 的一个连通部分, 称为 Π 的, 相对于 p 的一个关键多边形.

任何顶点 p 决定有限个关键多边形集. 我们开始考虑任何顶点 p 只确定一个关键多边形而且它是凸的情形:

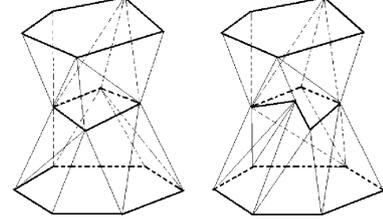


图 10 左边: 一个一型简单多面体. 右边: 一个二型简单多面体.

Fig. 10 Left: a type 1 polyhedron. Right: type 2 polyhedron.

我们说一个简单多面体是一个一型简单多面体当且仅当任何顶点恰好确定一个凸关键多边形. 我们说一个简单多面体是一个二型简单多面体当且仅当任何顶点恰好确定一个关键多边形.

插图10的左边是一个一型简单多面体, 右边是一个二型简单多面体.

这一段我们应用算法2有效地解两个特殊的ESP问题. 我们还指出, 这两问题的“补问题”是NP困难的或NP完全的.

我们推广关键多边形的概念: 我们假定广义 Π 是一个简单连通(可能无界)的多面体, 而且允许关键多边形是无界的. 例如, 一个广义关键多边形可以有一个顶点在无穷远, 或它可以是一个关键多边形的补.

我们使用[13]所引入的一些概念. 下面我们假设 (x_0, y_0, z_0) 是三维空间中的一个点. 假设

$$S_1 = \{(x, y, z_0) : x_0 \leq x < \infty \wedge y_0 \leq y < \infty\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z_0) : -\infty < x \leq x_0 \wedge y_0 \leq y < \infty\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z_0) : -\infty < x \leq x_0 \wedge -\infty < y \leq y_0\}$$

$$S_4 = \{(x, y, z_0) : x_0 \leq x < \infty \wedge -\infty < y \leq y_0\}$$

S_i 称为一个 i 型 q 矩形, 这里 $i=1, 2, 3, 4$. 进而, 假设 (x_1, y_1, z_0) 是三维空间中满足 $x_1 > x_0$ 而且 $y_1 > y_0$ 的一个点.

$$S_h = \{(x, y, z_0) : -\infty < x < \infty \wedge y_0 \leq y \leq y_1\}$$

$$S_v = \{(x, y, z_0) : x_0 \leq x \leq x_1 \wedge -\infty \leq y \leq \infty\}$$

假设 $S_h(S_v)$ 称为一个水平(垂直)条. 最后, 假设

$$S_{h_1} = \{(x, y, z_0) : x_0 \leq x < \infty \wedge y_0 \leq y \leq y_1\}$$

$$S_{h_2} = \{(x, y, z_0) : -\infty < x < x_1 \wedge y_0 \leq y \leq y_1\}$$

$$S_{v_1} = \{(x, y, z_0) : x_0 \leq x \leq x_1 \wedge y_0 \leq y < \infty\}$$

$$S_{v_2} = \{(x, y, z_0) : x_0 \leq x \leq x_1 \wedge -\infty < y \leq y_0\}$$

按照它们的几何形状, 我们注意到

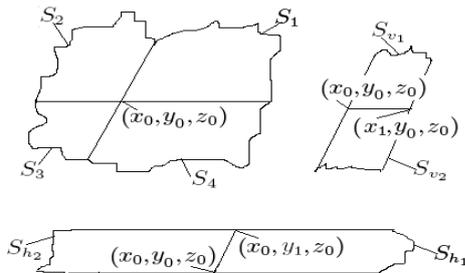


图 11 轴对准矩形.

Fig. 11 Axis-aligned rectangles.

$S_1 [S_2, S_3, S_4]$ 在 $(+x, +y)[(-x, +y), (-x, -y), (+x, -y)]$ 方向上是无界的;

$S_h[S_v]$ 在 $\pm x[\pm y]$ 方向上是无界的;

$S_{h_1}[S_{h_2}, S_{v_1}, S_{v_2}]$ 在 $+x[-x, +y, -y]$ 方向上是无界的.

S_i, S_h, S_v, S_{h_j} 和 S_{v_j} 是轴对准矩形(参见插图11), 这里 $i=1, 2, 3, 4, j=1, 2$. 如果 S 中每个矩形在四个方向 $-x, +x, -y$, 或 $+y$ 中至少一个方向上是无界的, 轴对准矩形的堆(一个两两平行但不相交的轴对准矩形的集合) S 称为地形的.

例 1

假设 Π 是一个简单多面体满足每个广义关键多边形是轴对准矩形. 假设 $p, q \in \Pi$ 满足 $p_z < q_z$. 假设 $V_{pq} = \{v : p_z < v_z < q_z \text{ 且 } v \in V\}$, 这里 V 是 Π 的顶点集. 由[12]的定理27可知, 包含于 Π 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径可以以复杂性 $\kappa(\epsilon) \cdot \mathcal{O}(|V_{pq}|)$ 来近似计算. 因此, 这种特别的情形的ESP问题可以有效地近似解决.

然而, 如果我们修改 Π 使得每个广义关键多边形是一个轴对准矩形的补, 那么根据以下的定理, 寻找包含于 Π 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径是NP完全的:

定理 3([13], 定理4) 判定是否存在一个回避障碍物的, 长最多 L 的, 轴一对准矩形堆中的欧几里德最

短路径是NP完全的. 如果所有轴对准矩形是一或三型 q 矩形, 那么此问题在这种特别的情形下也是NP完全的.

例 2

我们稍微修改例1当中的 Π :假设 Π 是一个简单多面体满足每个广义关键多边形是一个三角形. 由[12]的定理27可知, 包含于 Π 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径可以以复杂性 $\kappa(\epsilon) \cdot \mathcal{O}(|V_{pq}|)$ 来近似计算. 因此, 这种特别的情形的ESP问题可以有效地近似解决.

然而, 如果我们修改 Π 使得每个广义关键多边形是一个三角形的补, 那么根据以下的定理, 寻找包含于 Π 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径是NP完全的:

定理 4([2]) 判定是否存在一个回避障碍物的, 长最多为 L 的, 三角形堆中的欧几里德最短路径是NP困难的.

在本文以下的3.3段的例3和例4, 我们近似地解决这两个非常困难的问题.

3.3 三个NP完全或NP困难问题

正如本文3.2段一样, 我们再次推广关键多边形的概念, 同样允许无界的多边形. 我们现在应用推广的算法2 近似地解决本文3.2段所提到的困难问题.

例 3

我们修改例1如下: 假设 Π 是一个单连通多面体满足每个关键多边形是一个轴对准矩形的补. 假设 $p, q \in \Pi$ 满足 $p_z < q_z$, 这里 V 是 Π 的顶点集. 由[12]的定理32可知, 包含于 Π 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径可以以复杂性 $\kappa(\epsilon) \cdot \mathcal{O}(|V_{pq}|)$ 来近似计算. 因此, 这种特别的情形的ESP问题可以有效地近似解决(参见图12).

例 4

我们修改例2如下(也只是稍微修改例2当中的 Π): 假设 Π 是一个单连通多面体满足每个关键多边形是一个三角形的补. 由[12]的定理32可知, 包含于 Π 中 p 和 q 中间的欧几里德最短路径可以以复杂性 $\kappa(\epsilon) \cdot \mathcal{O}(|V_{pq}|)$ 来近似计算.

例 5

假设 S 是 k 个水平或垂直条的堆. 包含于 S 中的欧几里德最短路径可以以复杂性 $\kappa(\epsilon) \cdot \mathcal{O}(k)$ 近似计算. 根据以下的定理, 寻找该问题的精确解是NP完全的:

定理 5([13], 定理5) 判定是否存在一个回避障碍物的, 长最多为 L 的, 水平或垂直条的堆中的欧几里德最短路径是 NP 完全的.

例 6

假设 S 是 k 个地形的, 轴对准矩形的堆. 包含于 S 中的欧几里德最短路径可以以复杂性 $\kappa(\varepsilon) \cdot \mathcal{O}(k)$ 来近似计算. 根据以下的定理, 寻找该问题的精确解的最好的已知算法的复杂性是 $\mathcal{O}(k^4)$:

定理 6([13], 定理6) 假设 S 是 k 个地形的, 轴对准矩形的堆, S 中的欧几里德最短路径可以以复杂性 $\mathcal{O}(k^4)$ 来计算.

例6说明, 一个最好的已知算法的复杂性是 $\mathcal{O}(k^4)$ 的精确解问题却可以以复杂性 $\kappa(\varepsilon) \cdot \mathcal{O}(k)$ 来近似计算(精确度参数 ε 可以选定给定计算机所能保证的最大可能的数量精确度.).

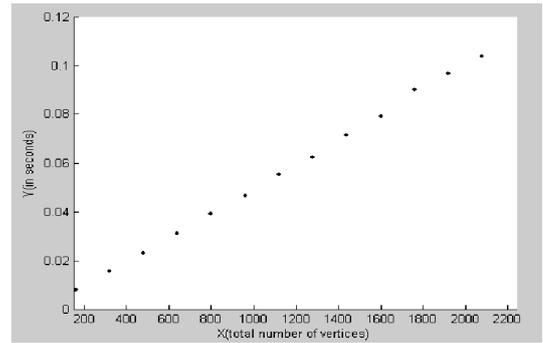


图 12 算法2应用于 q 矩形的补的运行时间.

Fig. 12 Illustration of measured run time for Algorithm 2 applied to the complements of q -rectangles.

4 结束语

本文首先详细介绍一个简单版本的R算法作为引导这个算法逼近的基本思想. 然后从一个实例, 而且给出一个一般的程序来解释如何处理退化路径. 最后文章报告当应用R算法的几个版本时的结果. 实例说明R算法定义了一个广阔的可应用的算法种类而且均以 κ 线性的复杂性近似地解决几个困难的几何问题.

参考文献(References)

- BÜLOW T, KLETTE R. Digital curves in 3D space and a linear-time length estimation algorithm[J]. IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence, 2002, 24(7): 962–970.
- CANNY J, REIF J H. New lower bound techniques for robot motion planning problems[A]. In Proc. IEEE Conf. Foundations Computer Science[C], Los Angeles, CA, USA, 1987.
- DROR M. Polygon plate-cutting with a given order[J]. IIE Transactions, 1999, 31(3): 271–274.
- DROR M, EFRAT A, LUBIWI A. et al. Touring a sequence of polygons[A]. In Proc. STOC[C], San Diego, California, USA, 2003.
- GAREY M R, GRAHAM R L, JOHNSON D S. Some NP-complete geometric problems[A]. In Proc. ACM Sympos. Theory Computing[C], Hershey, Pennsylvania, United States, 1976.
- GEOFFRION A M. Lagrangean relaxation and its uses in integer programming[J]. In Mathematical Programming Study, 1974, 2: 82–114.
- GUIBAS L, HERSHBERGER J, LEVEN D, et al. Linear-time algorithms for visibility and shortest path problems inside triangulated simple polygons[J]. Algorithmica, 1987, 2(1): 209–233.
- GUIGNARD M, KIM S. Lagrangean decomposition: a model yielding stronger Lagrangean bounds[J]. Mathematical Programming, 1987, 39(2): 215–228.
- HOEFT J, PALEHAR U S. Heuristics for the platecutting traveling salesman problem[J]. IIE Transactions, 1997, 29(9): 719–731.
- LAPORTE G, MERCURE H, NOBERT Y. Generalized traveling salesman problem through n clusters[J]. Discrete Applied Mathematics, 1987, 18(2): 185–197.
- LAWLER E, LENSTRA J, RINNOOY K A, et al. The Traveling Salesman Problem[M]. A Guided Tour of Combinatorial Optimization. New York: John Wiley and Sons, 1985.
- LI F, KLETTE R. Exact and approximate algorithms for the calculation of shortest paths[R]. IMA Minneapolis, Report 2141 on www.ima.umn.edu/preprints/oct2006, 2006.
- MITCHELL J S B, SHARIR M. New results on shortest paths in three dimensions[A]. In Proc. SCG[C], Brooklyn, New York, USA, 2004.
- NOON C E, BEAN J C. An efficient transformation of the generalized traveling salesman problem[J]. INFOR, 1993, 31: 39–44.

作者简介:



李发捷, 男, 1965年生, 博士, 荷兰格罗宁根大学博

士后(2007–2010), 主要研究方向为数字几何、计算几何、天文数据的计算机视觉分析, 发表论文10多篇.

E-mail:F.Li@rug.nl



KLETTE Reinhard, 男, 1950年生, 博士, 教授, 主要研究方向为并行计算、图象处理、计算机视觉、数字几何、计算几何, 发表论文250多篇, 出版专著8部, 编辑专著21部.

KLETTE Reinhard教授目前担任以下的期刊的编辑或委员: “IEEE Trans. PAMI”(Associate Editor)、“CAAI Transactions on Intelligent Systems(智能系统学报)”(Member of Editorial

Board)、Springers “Computational Imaging and Vision”(Editor)、“International Journal of Computer Vision”(Member of Editorial Board)、“Machine GRAPHICS & VISION” (Member of Advisory Board)、Opto-Electronics Review(Member of Editorial Advisory Board).

他是以下国际学术会议的主要发起人: CAIP conferences(International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns)(Member of Steering Committee).

他是28场国际学术会议(在智利、德国、新西兰、台湾等地)的主席或副主席. 他是2005年DAGM奖获得者之一. 他曾应邀在阿根廷、中国、印度、意大利、新西兰、台湾和美国等地国际学术会议上作一小时报告.

他在德国柏林技术大学、德国哥廷根大学和奥克兰大学已指导培养14名博士和100多名硕士.